ウェブ補論　4章　等比数列の和の求め方（p.113）

4章の章末においては、項が無限に続く等比数列の和の求め方を説明しましたが、実はこの議論が成立するには、数列の項が徐々に0に近づいていく必要があります。この補論では、数列の和の求め方をより厳密に説明します。
本と同様、第1項の値(初項)がaであり、公比が$r>0$の等比数列を考えます。

$$a, ar, ar^2, \dots$$

第t項の値はar^{t-1}とかけます。まず、この数列の第1項から第T項までの和(S)、

$$(1)\ S = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{T-1}$$

を求めます。はじめに、上式の両辺を公比r倍します。この時左辺の値はrSに等しくなります。一方右辺については、その各項をr倍すると、例えば初項はarに、最終項の第T項はar^Tになります。よって以下の等式を得ます。

$$(2)\ rS = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{T-1} + ar^T$$

ここで(1)式と(2)式の右辺には共に同じ式$ar + ar^2 + \cdots + ar^{T-1}$があります。(2)式より、$rS - ar^T = ar + ar^2 + \cdots + ar^{T-1}$となり、この式を(1)式に代入することで、

$$S = a + (rS - ar^T) = a(1 - r^T) + rS$$

を得ます。この式をSについて解くことで、以下のような公式を得ます。

$$(3) S = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{T-1} = a\frac{1 - r^T}{1 - r}$$

例えば、初項がa=1で、公比がr=0.5の数列の第20項までの和は

$$S = 1 + 0.5 + 0.5^2 + \cdots + 0.5^{19} = \frac{1 - \mathbf{0.5^{20}}}{1 - 0.5} = 2(1 - \mathbf{0.5^{20}})$$

と表せます。ここで0.5^{20}はとても小さい数であり、上の値は$2(1-0)=2$にほぼ等しくなります。一般に、<u>公比rの大きさが1未満(0<r<1)</u>であり、かつ項の数Tがとても大きいとき、等比数列の和の公式(3)の右辺にあるr^Tの値はとても小さくなります。そして、この<u>数列を無限に加えていく</u>と、つまりTの値を無限に大きくすると、r^Tの値は0になります。従って、本でも導いた以下の定理を得ます。
定理　初項がaであり、公比が$r (0 < r < 1)$の等比数列の和

$$a + ar + ar^2 + \cdots + \cdots = \frac{a}{1 - r}$$

なお、公比が1を超える場合、等比数列の和は無限に大きくなり、値を定めることができません。